2/12/2020

Ακολουθίες συναρτήσεων

Ορισμός 1: Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στον X. Λέμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο ($f: X \to \mathbb{R}$), αν $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, $\forall x \in X$.

Ισοδύναμα: $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Συμβολισμός: $f_n \to f$ (κατά σημείο)

Ορισμός 2: Έστω $\{f_n\}$, f όπως πριν. Λέμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα (Συμβ. $f_n \xrightarrow{ομ.} f$ ή $f_n \rightrightarrows f$), αν $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.

• Προφανώς $f_n \xrightarrow{ομ.} f \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$

Παραδείγματα: 1) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$,

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. $f_n(x) \longrightarrow x$, $\forall x$.
Τότε $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, όπου $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητούμε $n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{= \frac{1}{n}} < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άρα, διαλέγουμε n_0 οποιοδήποτε $> \frac{1}{\varepsilon}$.

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{ομ.} f$. ▨

2) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{nx}$

$f(x) = 0$, $\forall x \in (0,1)$. Τότε $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, αλλά όχι ομοιόμορφα.
Απόδειξη: $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ (προφανές)
Έστω ότι $f_n \xrightarrow{ομ.} f$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$, $\forall x \in (0,1) \Longleftrightarrow \forall x \in (0,1)$, $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{nx} < \varepsilon$

Διαλέγουμε $x_n = \frac{1}{n} \in (0,1)$

$\Longrightarrow \frac{1}{n \cdot x_n} = 1$, δεν είναι $< \varepsilon$, άτοπο

$\Longrightarrow f_n \overset{ομ.}{\not\longrightarrow} f$. ▨

Πρόταση: Αν $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (αντιστοίχως κατά σημείο), τότε το όριο (οριακή συνάρτηση) είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω ότι $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f \Longrightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$,

$\forall x \in X$. Αν $f_n \xrightarrow{κ.σ.} g$, τότε $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$,

$\forall x \in X \Longrightarrow f(x) = g(x)$ (από την μοναδικότητα ορίου πραγματικών ακολουθιών), $\forall x \in X \Longrightarrow f = g$.

Έστω ότι $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, $f_n \xrightarrow{ομ.} g \Longrightarrow$

$f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} g \Longrightarrow f = g$. ▨

Θεώρημα 1: Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στον X και $f: X \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $f_n \xrightarrow{ομ.} f$

(ii) $\underbrace{\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Απόδειξη: (ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists \underbrace{n_0}_{n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{ομ.} f$.

(i) ⟹ (ii) $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$, $\forall x \in X$.

$\Longrightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, να ισχύει $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

$\Longrightarrow \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$. ☒

<u>Ορισμός</u>: Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ ($f_n : X \to \mathbb{R}$) λέγεται ομοιόμορφα Cauchy, αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall m, n \geq n_0$,
$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.

<u>Θεώρημα 2</u> Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) $\{f_n\}$ ομοιόμορφα Cauchy
(ii) Η $\{f_n\}$ είναι "Cauchy ως προς την $\|\cdot\|_\infty$", δηλ. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall m, n \geq n_0$, να ισχύει $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

<u>Απόδειξη</u>: Ομοίως, με Θεώρημα 1. ☒

<u>Θεώρημα 3</u> ("Πληρότητα ως προς $\|\cdot\|_\infty$")
Έστω $\{f_n\}$ ομοιόμορφα Cauchy αν-ν $\exists f : X \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

<u>Απόδειξη</u>: (⟸) $\exists f : X \to \mathbb{R}$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in X$ $\Longrightarrow \forall m, n \geq n_0, \forall x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Longrightarrow \{f_n\}$ ομοιόμορφα Cauchy

$(\Longrightarrow)$ $\{f_n\}$ ομοιόμορφα Cauchy

$\Longrightarrow$ $\{f_n(x)\}$ είναι Cauchy $\forall x \in X$.

$\xRightarrow[\text{πραγμ. ακολουθία}]{\{f_n(x)\}}$ $\exists f(x) \in \mathbb{R}$, τ.ω. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

• Αρκεί νδο $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$.

Έστω $\varepsilon > 0$. $\{f_n\}$ ομοιομ. Cauchy $\Longrightarrow$

$\exists \underset{\text{"}n_0(\varepsilon)}{n_0} \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall m, n \geq n_0$, να ισχύει

$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in X$

$\xRightarrow[m\to\infty]{f_m \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f}$ $\forall m, n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, $\forall x \in X$

$\Longrightarrow$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$

$\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Longrightarrow f_n \xrightarrow[\text{ομ.}]{} f$ ∎

Παράδειγμα(*): $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

όπου $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

και $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1/2, & |x| = 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

Τότε : $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

Συμπέρασμα: Αν $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f \not\Longrightarrow f$ συνεχής

Θεώρημα 4:
Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στον X, τ.ω. f_n συνεχής στο $x_0 \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$. Τότε, f συνεχής στο x_0. Ειδικότερα, αν $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, τ.ω. $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$, τότε και η f είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Θδο f συνεχής στο x_0.

• $f_n \xrightarrow{o\mu.} f \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. ①

• f_{n_0} συνεχής στο $x_0 \Longrightarrow \exists \delta > 0$, τ.ω. $\forall x \in B(x_0, \delta)$
$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$. ②

$\Longrightarrow \forall x \in B(x_0, \delta)$, ισχύει: $|f(x) - f(x_0)|$
$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$

Από ① και ② $< \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\Longrightarrow f$ συνεχής στο x_0. ∎

Πόρισμα: Έστω (X,d) ένας συμπαγής μ.χ. Τότε, ο $(C(X), D)$ είναι πλήρης μ.χ. $[D(f,g) = \|f-g\|_\infty]$

Απόδειξη: Έστω $\{f_n\}$ Cauchy ως προς την $D \xrightarrow{\Theta 2} \{f_n\}$ ομοιόμορφα Cauchy

$\xrightarrow{\Theta 3} \exists f: X \to \mathbb{R}$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$

$\xrightarrow[\text{συνεχής}]{\Theta.4} \exists f \in C(X)$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

$\xRightarrow{\Theta 1} \exists f \in C(X)$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{D} f$

$\Longrightarrow C(X)$ πλήρης. $\boxtimes$

• Π.χ. Από το Παράδειγμα ⊛ $f_n \not\xrightarrow{\text{ομ.}} f$ (γιατί f_n συνεχής $\forall n \in \mathbb{N}$, αλλά f ασυνεχής).

• Αν $f_n \to f$, f_n συνεχείς και f συνεχής

$\xRightarrow{?} f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

Απάντηση: Όχι, π.χ. $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $f(x) = 0$

$x \in (0,1)$

• Αν $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, (X,d) συμπαγής, f_n, f συνεχείς, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

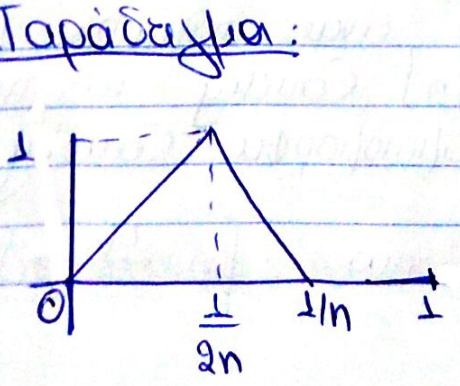
$\xRightarrow{?} f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. Αν υποθέσουμε την $\{f_n\}$ $\underbrace{\text{ομ. φραγμένη}}$;

$\exists M > 0$ τ.ω. $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Απάντηση: Όχι.

Παράδειγμα:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \leq x \leq 1/2n \\ -2nx+2, & \frac{1}{2n} < x < 1/n \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$



• f_n συνεχής στο $[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

• $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

Πράγματι, $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Αν $x \in (0,1]$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $x > \frac{1}{n_0} \Rightarrow \forall n \geq n_0$, $x > \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow f_n(x) = 0$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• Όμως, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$.
Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$
Διαλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2n}$, οπότε
$|f_n(x) - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο.

$\Longrightarrow f_n \overset{\text{ομ.}}{\not\longrightarrow} f$. $\boxtimes$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων από τον X. Η $\{f_n\}$ ονομάζεται αύξουσα (αντ. φθίνουσα), αν $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (αντ. $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$.

<u>Θεώρημα Dini</u>: Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. Έστω $\{f_n\} \subseteq C(X)$, $f \in C(X)$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$. Αν $\{f_n\}$ μονότονη τότε $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η $\{f_n\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Dini, τότε είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, f_n, f συνεχείς $\forall n$, $\{f_n\}$ μονότονη
$\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, αν ο X δεν είναι συμπαγής.

π.χ. $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$

Τότε $\{f_n\}$ φθίνουσα , $f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$.

Όμως, $f_n \not\rightrightarrows 0$. Πράγματι, έστω ότι $f_n \xrightarrow{ομ.} 0$ και έστω $\varepsilon > 0$

Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in (0,1)$

$$\underbrace{|f_n(x) - 0|}_{x^n} < \varepsilon$$

Διαλέγοντας $x = 1 - \frac{1}{n}$, ΟΚΕ $< \frac{1}{2e}$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} > \frac{1}{2e}$$

για μεγάλα n, άτοπο. $\boxtimes$